數學傳播　49卷2期, pp. 134-135

用複數法證明牛頓線定理

朱小扣

牛頓線定理: 完全四邊形 $ABCDEF$ 的三條對角線的中點共線。

如圖 1, 在完全四邊形 $ABCDEF$ 中, M,N,P 分別爲對角線 AD,BF,CE 的中點, 求證: M,N,P 共線。

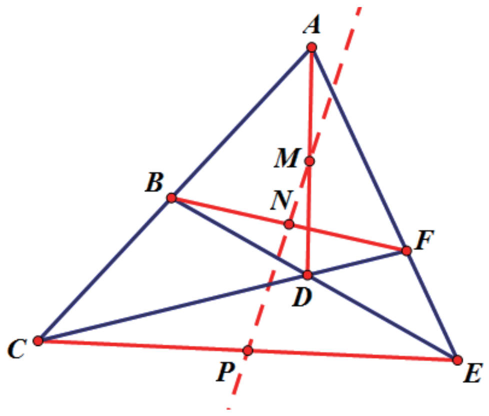

圖 1

證明

引理: 複平面上 A,B,C 三點共線 (用字母本身表示該點所代表的複數)

$$\Leftrightarrow \frac{A-B}{A-C}=k\in\mathbb{R} \ \Leftrightarrow\ \frac{A-B}{A-C}=\frac{\overline{A}-\overline{B}}{\overline{A}-\overline{C}} \ \Leftrightarrow\ A\overline{B}+B\overline{C}+C\overline{A}=\overline{A}B+\overline{B}C+\overline{C}A.$$

(引理非常顯然, 其證明在這裏不作贅述。)

在三角形所在的平面建立複平面, 用字母本身表示該點所代表的複數, 則:

$$M=\frac{A+D}{2},\quad N=\frac{B+F}{2},\quad P=\frac{C+E}{2}.$$

欲證明 M, N, P 共線, 由引理知只需證: $M\overline{N}+N\overline{P}+P\overline{M}= \ \overline{M}N+\overline{N}P+\overline{P}M$

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow \frac{A+D}{2}\cdot\frac{\overline{B}+\overline{F}}{2}+\frac{B+F}{2}\cdot\frac{\overline{C}+\overline{E}}{2}+\frac{C+E}{2}\cdot\frac{\overline{A}+\overline{D}}{2}\\ &\quad=\frac{\overline{A}+\overline{D}}{2}\cdot\frac{B+F}{2}+\frac{\overline{B}+\overline{F}}{2}\cdot\frac{C+E}{2}+\frac{\overline{C}+\overline{E}}{2}\cdot\frac{A+D}{2}\\ &\Leftrightarrow A\overline{B}+A\overline{F}+D\overline{B}+D\overline{F}+B\overline{C}+B\overline{E}+F\overline{C}+F\overline{E}+C\overline{A}+C\overline{D}+E\overline{A}+E\overline{D}\\ &\quad=\overline{A}B+\overline{A}F+\overline{D}B+\overline{D}F+\overline{B}C+\overline{B}E+\overline{F}C+\overline{F}E+\overline{C}A+\overline{C}D+\overline{E}A+\overline{E}D,\end{aligned}$$

$$\text{相加} \Leftarrow \begin{cases} A\overline{B}+B\overline{C}+C\overline{A}=\overline{A}B+\overline{B}C+\overline{C}A \ \Leftarrow\ A, B, C \text{ 共線}\\ A\overline{F}+F\overline{E}+E\overline{A}=\overline{A}F+\overline{F}E+\overline{E}A \ \Leftarrow\ A, F, E \text{ 共線}\\ D\overline{B}+B\overline{E}+E\overline{D}=D\overline{B}+B\overline{E}+E\overline{D} \Leftarrow\ D, B, E \text{ 共線}\\ D\overline{F}+F\overline{C}+C\overline{D}=D\overline{F}+F\overline{C}+C\overline{D} \Leftarrow\ D, F, C \text{ 共線。}\end{cases}$$

即證。

總結: 牛頓線定理有很多純幾何的證明方法, 但這些純幾何的證明方法往往不好想, 用複數法就可以輕鬆的寫出。一般地, 解決平面幾何問題可以用幾何法 (難想)、建系法 (難算)、三角硬演算法 (難想+ 難算)、複數法, 筆者覺得有些難的幾何題只有通過複數才能秒殺!

参考文獻

1. 王偉傑, 朱小扣。巧用複數優化解題。高中學數學教與學, 2022 (19)。

—本文作者任教中國安徽省無爲中學—